PART4 商の導関数，x^n の導関数

要点整理と公式

要点① 商の微分法

導関数について，次の公式が成り立つ。

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，k，l を定数とすると

1　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　2　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3　$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

4　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

5　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$　とくに $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

（公式5の証明）

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right\}$$

ここで，$g(x)$ は微分可能であるから連続関数　よって　$\displaystyle\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

したがって　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-g'(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)g(x)}=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(ex) 関数 $y=\dfrac{3x}{x^2+1}$ を微分すると

$$y'=\frac{(3x)'(x^2+1)-3x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

要点② x^n の導関数

n が正の整数のとき $(x^n)' = nx^{n-1}$ ……①　である。n が負の整数においても①が成り立つことを示す。

n が負の整数のとき，$n = -m$ とおくと，m は正の整数であるから

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{\qquad x^m}{x^m} = -\frac{x}{x^{2m}} = -mx \qquad\qquad = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

よって，①は n が負の整数のときにも成り立つ。

また，$n = 0$ のときは，$(x^0)' = (\quad)' = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$ であるから，①が成り立つ。

したがって，以下の公式が成り立つ。

> **x^n の導関数**
>
> n が整数のとき　$(x^n)' = nx^{n-1}$

(ex) 関数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ を微分すると

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x \quad)' = \qquad x \qquad = -\frac{2}{x^3}$$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x+3}$　　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^3}$　　(4) $y=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}$

Point Pickup

商の導関数

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ とくに $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

x^n の導関数

n が整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

第 7 講　PART4 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$y=\dfrac{1}{3x+1}$

$y'=$ ア

①　$-\dfrac{1}{3x+1}$　　②　$\dfrac{1}{(3x+1)^2}$

③　$\dfrac{3}{(3x+1)^2}$　　④　$-\dfrac{3}{(3x+1)^2}$

2　$y=\dfrac{x}{x^2+2}$

$y'=$ イ

①　$\dfrac{-x}{x^2+2}$　　②　$\dfrac{-x^2}{(x^2+2)^2}$

③　$\dfrac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$　　④　$\dfrac{-x^2+x+2}{(x^2+2)^2}$

3　$y=\dfrac{1}{x^4}$

$y'=$ ウ

①　$-\dfrac{4}{x^3}$　　②　$\dfrac{1}{x^5}$

③　$-\dfrac{1}{x^5}$　　④　$-\dfrac{4}{x^5}$

4 $y=\dfrac{x^3-2x+3}{x^2}$

$y'=$ **エ**

① $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}$ ② $1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$

③ $1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}$ ④ $x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}$

[MEMO]

PART4 商の導関数，x^n の導関数

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x+3}$　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^3}$　(4) $y=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}$

[解答]

(1) $y'=-\dfrac{(2x+3)'}{(2x+3)^2}=-\dfrac{2}{(2x+3)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

(3) $y'=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

(4) $y=\dfrac{x^3+x-1}{x^2}=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ より

$y'=(x)'+(x^{-1})'+(-x^{-2})'=1-x^{-2}+2x^{-3}=1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$

第 7 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$$y'=-\frac{(3x+1)'}{(3x+1)^2}$$

$$=-\frac{3}{(3x+1)^2}$$ [A]

[A]　商の導関数
$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{1}{\{g(x)\}^2}$$

2

[正解] イ：③

[解説]

$$y'=\frac{(x)'(x^2+2)-x(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{1\cdot(x^2+2)-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$ [B]

[B]　商の導関数
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

3

[正解] ウ：④

[解説]

$$y'=\left(\frac{1}{x^4}\right)'=(x^{-4})'$$ [C]

$$=-4x^{-5}$$ [D]

$$=-\frac{4}{x^5}$$

[C]　x^n の形にする。

[D]　n が整数のとき，
$(x^n)'=nx^{n-1}$

4 [正解] エ：②

[解説]

$$y=\frac{x^3-2x+3}{x^2}=x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$$ より，

$$y'=(x)'-2\left(x^{-1}\right)'+3\left(x^{-2}\right)' \quad \text{[E]}$$
$$=1+2x^{-2}-6x^{-3}$$
$$=\mathbf{1+\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}}$$

[E]　n が整数のとき，
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$

（別解）

$$y'=\left(\frac{x^3-2x+3}{x^2}\right)'$$
$$=\frac{\left(x^3-2x+3\right)'x^2-\left(x^3-2x+3\right)\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} \quad \text{[F]}$$
$$=\frac{\left(3x^2-2\right)x^2-\left(x^3-2x+3\right)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{3x^4-2x^2-2x^4+4x^2-6x}{x^4}$$
$$=\frac{x^4+2x^2-6x}{x^4}$$
$$=\mathbf{1+\frac{2}{x^2}-\frac{6}{x^3}}$$

[F]　商の導関数
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$